Solutions des exercices non faits en classe

1. Transformées de Fourier et produit de convolution

Exercice 3. On a

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f_2 = \frac{2}{y^2 \pm y + 2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_y^{\pm} f_3 = \frac{2e^{\pm iy}}{1+y^2}$$

si $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^4}\, dx = \frac{\pi}{8}$.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos(\pi x/2)}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{8}(\pi+2)e^{-\pi/2}$.

Exercice 6.

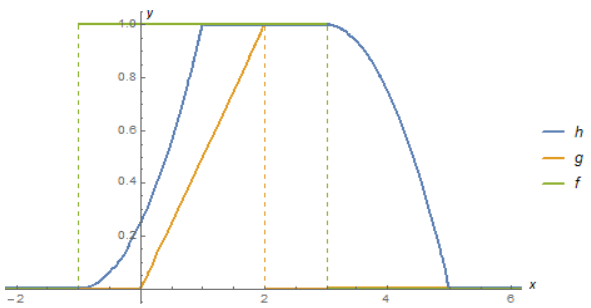
(2) On a $(f * g)(x) = -ex\chi_{[0,+\infty[}(x)$ si $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.

(1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h(x) := (f*g)(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 5 \\ (x+1)^2/4 \quad \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \quad \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ (-x^2+6x-5)/4 \quad \text{si } 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

(2) Une représentation des trois fonctions f, g et $h = f * g$ est donnée par



2. Extrema libres et sous contrainte

Exercice 1.

(2) La fonction f_2 n'admet aucun extremum sur son domaine.
(3) La fonction f_3 admet un minimum local (non global) strict en $(1, 1)$.
(6) La fonction f_6 admet un minimum global strict en $(0, 0)$.
(7) La fonction f_7 admet un maximum local (non global) strict en $(-1, -1)$.
(9) La fonction f_9 admet un minimum global strict en $(1/2, -1)$.

Exercice 6. cf. “Corrigé de l'exercice 5 sur les extrema”, sur le site de Françoise Bastin (année académique 2016-2017).

Exercice 7.

(a) Sur $\mathcal{E}$, f admet des maxima globaux non stricts en les points de coordonnées $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et des minima globaux non stricts en $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

(b) Sur le disque centré à l'origine et de rayon 3, g admet un minimum global strict en $(0,0)$ et deux maxima globaux non stricts en $(0,3)$ et $(0,-3)$.

F. Bastin et L. Demeulenaere – 17 octobre 2019